

Vive les Maths

Recueil d'exercices

Daniel Bussy

Édition 2025

Table des matières

Nombres entiers & divisibilité	3
--	---

Exercice 1**Divisibilité**

Complète les tableaux suivants :

A.

divisible par	2	3	4	5	6	9	10	25	50	75	100
13464											
1800											
36275											
41080											
410205											
12350											

B.

divisible par	2	3	4	5	6	9	10	25	50	75	100
43464											
18800											
6275											
91080											
610290											
52350											

C.

divisible par	2	3	4	5	6	9	10	25	50	75	100
17820											
46200											
71180											
610215											
62352											
256400											

D.

divisible par	2	3	4	5	6	9	10	25	50	75	100
1880											
28530											
925											
275985											
15__	x		x	x			x				
387__	x	x	x		x	x					

Exercice 2**Décomposition en facteurs premiers****Théorème fondamental de l'arithmétique :**

Chaque entier supérieur à 1 est premier ou un produit de nombres premiers ; la factorisation est unique, mis à part l'ordre des facteurs.

Décompose chaque nombre ci-dessous en un produit de facteurs premiers.

A.

255 =

450 =

84 =

42 =

600 =

52 =

B.

1340 =

140 =

342 =

280 =

144 =

1450 =

C.

720 =

378 =

270 =

210 =

117 =

480 =

Exercice 3**Diviseurs**

Détermine l'ensemble des diviseurs des nombres suivants :

A.

34 46 57 100 120 150 215 250 430 1250

B.

130 134 246 300 320 460 620 850 750 1840

Exercice 4**Crible d'Ératosthène et formule d'Euler**

Un **nombre premier** est un nombre entier supérieur à 1 qui ne possède que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Des diverses méthodes utilisées pour fabriquer une table des nombres premiers, la plus intéressante est celle que l'on attribue à Ératosthène, astronome, mathématicien et géographe grec (III^e siècle av. J.-C.). Cette méthode, qui a reçu le nom de *crible d'Ératosthène*, consiste à écrire la suite des nombres entiers naturels à partir de 2 et à barrer dans cette suite les multiples de 2 à partir de 4, puis les multiples de 3 à partir de 6, ainsi de suite avec les multiples de 5, 7, 11, etc.

Finalement, sont premiers les nombres qui restent non barrés.

Gérard Charrière, *L'algèbre mode d'emploi*

A.

Applique la méthode du crible d'Ératosthène pour dresser la liste des nombres premiers inférieurs à 144.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

Nombres premiers inférieurs à 144 :

« Jusqu'à ce jour, les mathématiciens ont en vain tenté de découvrir un ordre dans la suite des nombres premiers et nous avons des raisons de croire que c'est un mystère que l'esprit ne pénétrera jamais. »
Leonhard Euler

« Euler rencontre en 1772 une curieuse expression algébrique : $n^2 + n + 41$. En remplaçant n par des nombres entiers de 0 à 39, il obtient une suite ininterrompue de 40 nombres premiers. Mais cette suite se brise lorsqu'il remplace n par 40. En effet, $40^2 + 40 + 41 = 1681$ n'est pas un nombre premier. »
Gérard Charrière, *L'algèbre mode d'emploi*

B.

Retrouve la suite des 40 nombres premiers obtenus par Euler en remplaçant n par les nombres entiers de 0 à 39 dans l'expression $n^2 + n + 41$.

Exercice 5	Nombres parfaits
-------------------	-------------------------

Un **nombre parfait** est un nombre naturel non nul qui est égal à la somme de ses diviseurs stricts (ses diviseurs sauf lui-même).

Parmi les nombres suivants, lesquels sont parfaits ?

- 6 28 496 875 8128

Exercice 6**PGDC et PPMC**

Recherche le PGDC et le PPMC des nombres suivants :

A.

L. 34 et 26

M. 130 et 260

O. 25 et 45

A. 108 et 225

V. 16 et 18

T. 375 et 2070

E. 120 et 300

H. 12 et 8

B.

L. 382 et 675

M. 180 et 378

I. 528 et 204

A. 384 et 132

E. 25 et 16

T. 45 et 90

B. 54 et 36

H. 384, 126 et 132

Exercice 7**Problèmes de PPMC et PGDC**

A.

Louise collectionne des pièces de 20 centimes. Elle sait que l'ensemble de ses pièces représente un montant inférieur à CHF 50. Afin de connaître la somme exacte, elle les regroupe une première fois par piles de 7 pièces et une seconde fois par piles de 10. Dans les deux cas, il ne lui en reste aucune.

De quelle somme dispose Louise ?

B.

Diane collectionne des pièces de 5 centimes. Elle sait que l'ensemble de ses pièces représente un montant compris entre CHF 35 et CHF 40. Afin de connaître la somme exacte, elle les regroupe une première fois par piles de 24 pièces et une seconde fois par pile de 45. Dans les deux cas, il ne lui en reste aucune.

De quelle somme dispose Diane ?

C.

Aziz collectionne des pièces de 5 centimes. Il sait que l'ensemble de ses pièces représente un montant compris entre CHF 30 et CHF 40. Afin de connaître la somme exacte, il les regroupe une première fois par piles de 30 pièces et une seconde fois par piles de 105. Dans les deux cas, il lui reste 17 pièces.

De quelle somme dispose Aziz ?

D.

Un rectangle mesure 120 mm sur 260 mm. On désire le découper en carrés tous identiques.

Quelle mesure faut-il donner aux côtés des carrés ? Donne toutes les solutions possibles qui représentent un nombre entier de millimètres supérieur à 4.

E.

Une parcelle rectangulaire mesure 240 m sur 250 m. On désire la clôturer en plaçant à égale distance les uns des autres le moins de piquets possible, mais au moins un à chaque coin.

1) Calcule la distance qu'il faut laisser entre chaque piquet, de manière qu'elle corresponde à un nombre entier de mètres.

2) Calcule le nombre de piquets nécessaires.

F.

Parmi les principaux satellites de la planète Jupiter, quatre effectuent respectivement leur révolution en 42 heures, 84 heures, 168 heures et 420 heures. Ce sont Io, Europe, Ganymède et Callisto.

1) Dans combien de temps ces quatre satellites se retrouveront-ils dans les mêmes positions relatives qu'ils occupent aujourd'hui ?

2) Combien de révolutions chacun d'eux aura-t-il accomplies dans ce temps ?

G.

Un vigneron possède entre 1000 et 1200 bouteilles. Il constate qu'il peut les ranger exactement en rangées de 12, 15 ou 18 bouteilles.

Combien de bouteilles ce vigneron possède-t-il ?

H.

Un commerçant a reçu un lot de 420 bonbons et 196 sucettes. Il veut réaliser des paquets contenant tous le même nombre de bonbons et de sucettes.

Combien de paquets pourra-t-il réaliser au maximum ?

I.

On veut recouvrir une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,42 m avec des dalles carrées dont le côté mesure un nombre entier de centimètres.

1) Quelle est la taille maximale de ces dalles ?

2) De combien de dalles a-t-on besoin ?

J.

Trois bateaux partent ensemble du même port pour des destinations différentes. Le premier est de retour après 15 jours, le deuxième après 20 jours et le troisième après 25 jours. À la fin de chaque croisière, chaque bateau repart le jour même de son retour

1) Au bout de combien de jours se retrouvent-ils ensemble au port de départ ?

2) Combien de voyages chaque bateau a-t-il accomplis pendant ce temps ?

K.

Ces trois dernières années, les cotisations d'une société, comptant plus de 150 membres, ont rapporté respectivement CHF 1660 ; CHF 2500 ; CHF 2200. Le montant de la cotisation n'a pas varié pendant ces trois ans.

1) Calcule le montant de cette cotisation, sachant qu'il est supérieur à CHF 15. Combien cette société a-t-elle de membres durant la dernière année ?

2) Calcule le montant de cette cotisation, sachant qu'il est inférieur à CHF 25 et que la société n'a jamais compté plus de 250 membres.

L.

Trois écoliers s'amuse à marcher tout droit dans la même direction et le même sens, avec des pas différents de 50 cm, 70 cm et 80 cm.

À quelle distance de leur point de départ se retrouveront-ils de nouveau alignés ?

M.

Un village compte trois associations. La fanfare se réunit tous les 7 jours, le club de jass tous les 12 jours et le chœur mixte tous les 15 jours. Aujourd'hui, toutes ces associations se sont réunies.

Dans combien de jours se réuniront-elles toutes à nouveau ?

N.

Une fleuriste dispose de 90 roses et 105 œillets.

1) Quel est le plus grand nombre de bouquets identiques qu'elle peut composer en utilisant toutes les fleurs ?

2) Combien de fleurs de chaque type comptera alors un bouquet ?

Exercice 8

Nombres amicaux

Deux nombres sont dits **amicaux** si chacun est la somme des diviseurs stricts de l'autre.

Vérifie les paires de nombres amicaux suivantes :

A.

La paire (220 ; 284) fut découverte par les Pythagoriciens. Elle fut considérée comme symbole de l'amitié.

B.

La paire (17296 ; 18416) fut découverte par Fermat en 1636.